View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Kyoto University Research Information Repository
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository
KYOTO UNIVERSITY

Title	The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory(General and Geometric Topology and Geometric Group Theory)
Author(s)	木田, 良才
Citation	数理解析研究所講究録 (2006), 1492: 65-70
Issue Date	2006-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/58270
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
1492 巻 2006 年 65-70

The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory

木田 良才 (Yoshikata Kida)*
京都大学大学院理学研究科
Graduate School of Science, Kyoto University

1 序

幾何学的群論における, 2 つの有限生成群の間の擬等長 (quasi-isometry) の概念の類似として, Gromov は 2 つの離散群の間の measure equivalence という概念を導入した. 以下, 離散群と言えば, 離散かつ可算な群を指すことにする.

定義 1 ([9]). Γ, Λ を 2 つの離散群とする. これらが measure equivalent (今後, ME とかく) であるとは, σ-有限測度付きの標準 Borel 空間 (Ω, m) とその上の Γ, Λ の測度 m を保存する可測作用で次を満たすものがあるときをいう:

(i) Γ と Λ の作用は可換;

(ii) Γ, Λ の各作用は本質的に自由;

(iii) Γ, Λ の各作用は測度有限の基本領域をもつ.

ここで, 離散群の可測作用が本質的に自由であるとは, stabilizer が自明となる点全体の測度が 0 になるときをいう.

この ME という概念は, 離散群の間の同値関係を定める. 簡単にわかることだが, finite kernel と finite cokernel を除いて同型な 2 つの離散群は ME である. このような 2 つの離散群はほとんど同型であるということにしよう.

例 2. G を局所コンパクトかつ第 2 可算公理を満たす位相群とし, G 上の測度として Haar 測度を考える. Γ, Λ を G の lattice (i.e. finite covolume をもつ離散部分群) とする. このとき, Γ の左からの掛け算による G 上の作用と Λ の右からの掛け算による G 上の作用により, Γ と Λ は ME となる.

この例が, ME の概念を導入した動機の 1 つである. もう少し具体的に述べよう. 半単純 Lie 群の lattice に対し, その lattice の代数的性質がそれを含む Lie 群を決定するかどうかという問題は, 昔から考えられてきた自然なものであり, Mostow-Margulis の剛性定

**E-mail address*: kida@math.kyoto-u.ac.jp

理という美しい結果が得られている. この剛性定理は, lattice の同型が Lie 群の (局所) 同型を導くという形をしており, 上の問いに対し一つの答えを出している. 上の ME という概念は, この問題を Lie 群の lattice とは限らない一般の離散群に対して考えてみようというものである. かなり粗く述べると, どのような 2 つの離散群が同じ局所コンパクト群の lattice として実現できそうかを問うものである. (定義 1 における Ω は群である必要は全くないから, この言い方は間違いではあるが.) 1 つの問題としては, この ME という離散群の間の同値関係で, 離散群を分類してみることが挙げられよう. 今回の研究は, この問題を曲面の写像類群に関して考えてみるものである.

2 例

これまでに得られている, ME に関する重要な結果をいくつか挙げておこう.

例 3 ([15]). $n, m \geq 2$ としたとき, $SL(n, \mathbb{R})$ の lattice と $SL(m, \mathbb{R})$ の lattice が ME ならば, $n = m$.

例 4 ([4]). 次の例は, 例 3 を極めて一般化するものである. $n \geq 3$ としたとき, $SL(n, \mathbb{R})$ の lattice がある離散群 Λ と ME ならば, Λ は $SL(n, \mathbb{R})$ のある lattice とほとんど同型である. この事実により, $SL(n, \mathbb{R})$ の lattice に ME な離散群の class が決定された.

上の 2 つの例は, $SL(n, \mathbb{R})$ だけでなく, (半) 単純 Lie 群の枠組みで示されている. 次にもう 1 つだけ, ME の class で完全に決定されているものを挙げよう.

例 5 ([14]). 離散群 Γ が amenable であるとは, 任意の距離付きコンパクト空間 X 上の連続な Γ の作用に関して, X 上の確率測度で Γ-不変なものが存在するときをいう. (他にも, 多くの同値な条件がある.) 例えば, 全ての有限群や可換群は amenable であって, amenable という性質は部分群や商群, 拡大をとる操作で閉じている. Amenable でない群の代表例は非可換な自由群である.

ME に関して, 次のことがわかっている: 離散群 Γ が $\mathbb{Z}$ と ME となるためには, Γ が無限群であって, かつ, amenable であることが必要十分である.

注意 6. 例 3 と 例 5 において, [14] や [15] が発表された当時は, まだ ME の概念は生まれておらず, これらの論文では別の同値な定式化のもとで考察されている (定義 13 と命題 14 を見よ).

3 主結果

主定理を述べる前に, 記号と写像類群の定義について述べておこう. $M = M_{g,p}$ をコンパクトで向き付け可能な曲面とし, その種数を g, 境界成分の個数を p とする. このとき, $\kappa(M) = 3g + p - 4$ と記し, $g \leq 2$ のとき $g_0(M) = 2$, $g > 2$ のとき $g_0(M) = g$ と記す. 曲面 M の写像類群 $\Gamma(M)$ を M 上の向きを保存する微分同相写像のイソトピー類全体からなる群で定義する.

定理 7 ([10]). M^1, M^2 を 2 つのコンパクトで向き付け可能な曲面で, $\kappa(M^1), \kappa(M^2) \geq 0$ を満たすものとする. もし, 2 つの写像類群 $\Gamma(M^1)$ と $\Gamma(M^2)$ が ME ならば, 等式 $\kappa(M^1) = \kappa(M^2)$ と $g_0(M^1) = g_0(M^2)$ が成り立つ.

注意 8. トーラスでない曲面 M が $\kappa(M) < 0$ を満たすならば, その写像類群 $\Gamma(M)$ は有限である. また, 4 つの群 $\Gamma(M_{0,4}), \Gamma(M_{1,0}), \Gamma(M_{1,1}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ はほとんど同型である. さらに, 2 つの群 $\Gamma(M_{0,6})$ と $\Gamma(M_{2,0})$ もほとんど同型である.

注意 9. 定理 7 における等式 $\kappa(M^1) = \kappa(M^2)$ は, [10] とは別の手法でも得られる. このことについてコメントしておく.

Gaboriau は [7] において, 次の意味で離散群の ℓ^2-Betti 数が ME に関する不変量になることを示した: 2 つの離散群 Γ_1 と Γ_2 が ME ならば, ある正数 c が存在して, $\beta_n(\Gamma_1) = c\beta_n(\Gamma_2)$ が任意の n について成り立つ. ここで, 離散群 Λ に対し, $\beta_n(\Lambda)$ で Λ の第 n 次 ℓ^2-Betti 数を表すものとする.

一方, Gromov の結果 [8] と McMullen の結果 [13] を合わせると, $\kappa(M) \geq 0$ となる曲面 M の写像類群 $\Gamma(M)$ の ℓ^2-Betti 数が次のようになることがわかる: $\beta_{\kappa(M)+1}(\Gamma(M)) > 0$ かつ, 任意の $n \neq \kappa(M) + 1$ に対し, $\beta_n(\Gamma(M)) = 0$.

これらの結果により, 定理 7 における等式 $\kappa(M^1) = \kappa(M^2)$ が得られる.

写像類群を ME で分類するだけでなく, どんなタイプの離散群が写像類群と ME とならないかについても考察した.

定理 10 ([10]). M をコンパクトで向き付け可能な曲面とし, $\kappa(M) \geq 0$ とする. 離散群 G は n 個の階数 2 の自由群の直積を部分群として含むとし, さらに, 写像類群 $\Gamma(M)$ の無限部分群 Γ と ME であるとする. このとき,

$$n \leq g + \left[\frac{g+p-2}{2}\right]$$

が成り立つ. ここで, 実数 a に対し, $[a]$ で a 以下の最大の整数を表すとする.

実際, $\Gamma(M)$ は $g + [(g+p-2)/2]$ 個の階数 2 の自由群の直積を部分群として含むので, 上の定理における不等式は最良である.

証明においては, Adams [1], [2] による (Gromov の意味での) 双曲群に関する考察を参考にしている. 次の定理の "写像類群" という部分を " 非初等的な双曲群" と言い換えた定理が Adams の手法により証明することができる.

定理 11 ([10]). M をコンパクトで向き付け可能な曲面とし, $\kappa(M) \geq 0$ とする. このとき, 次の形の離散群と 写像類群 $\Gamma(M)$ は ME でない:

(i) Γ_1 と Γ_2 を無限群とし, Γ_1 または Γ_2 は無限 amenable 群を部分群として含むとしたときの直積 $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

(ii) 無限 amenable 群を正規部分群として含むような離散群.

この定理では, 双曲群と共通する性質を述べているわけだが, 次の定理により ME の視点からは写像類群と双曲群は異なる class に属していることがわかる:

定理 12 ([10]). M をコンパクトで向き付け可能な曲面とし, $\kappa(M) > 0$ とする. このとき, 写像類群 $\Gamma(M)$ と任意の双曲群は ME でない.

4 証明のための準備

ここでは証明を述べることは頁数の都合上不可能なので，どのような考え方で証明を進めていくかにだけ触れておきたい．前節で，上の定理の証明には Adams の手法を参考にしたことに触れたが，彼の論文では ME そのものでなく，それと同値な定式化のもとで証明をしていく．まず，そのことについて説明しよう．

定義 13. (X,μ), (Y,ν) を確率測度付きの標準 Borel 空間とする．2 つの離散群 Γ, Λ がそれぞれ (X,μ), (Y,ν) 上保測に作用していて，$\Gamma A = X$, $\Lambda B = Y$ を満たす測度正の Borel 部分集合 $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ と，その間の Borel 同型写像 $f\colon A \to Y$ で次を満たすものが存在するとする:

(i) 2 つの B 上の測度 $f_*(\mu|_A)$, $\nu|_B$ は互いに絶対連続;

(ii) ほとんどすべての $x \in A$ について，$f(\Gamma x \cap A) = \Lambda x \cap B$.

このとき，2 つの作用は弱軌道同値 (weakly orbit equivalent or WOE) であるという．特に，上の A, B が full measure でとれるとき，2 つの作用は軌道同値 (orbit equivalent or OE) であるという．

命題 14 ([5], [6])**.** 2 つの離散群 Γ, Λ が ME であるためには，Γ, Λ の確率測度付きの標準 Borel 空間上の保測作用で WOE となるものの存在が必要十分である．

Γ を離散群とし，Γ は (X,μ) 上保測かつ本質的自由に作用しているとする．このとき，

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\Gamma = \{(x, gx) \in X \times X : x \in X, g \in \Gamma\}$$

は，(X,μ) 上の同値関係 (equivalence relation) を定める．$\mathcal{R}$ は次のようにして，自然に (X,μ) 上の groupoid の構造をもつ:

1. Range map, $r\colon \mathcal{R} \ni (x,y) \mapsto x \in X$.
2. Source map, $s\colon \mathcal{R} \ni (x,y) \mapsto y \in X$.
3. Product, $(x,y)\cdot(y,z) = (x,z)$.
4. Inverse, $(x,y)^{-1} = (y,x)$.

2 つの離散群 Γ, Λ がそれぞれ (X,μ), (Y,ν) 上保測かつ本質的自由に作用しているとする．(X,μ), (Y,ν) 上の relation $\mathcal{R}_\Gamma$, $\mathcal{R}_\Lambda$ がそれぞれ定義される．このとき，Γ と Λ の作用が OE であることと，$\mathcal{R}_\Gamma$ と $\mathcal{R}_\Lambda$ が groupoid として同型になることは同値である．このことにより，ME の問題を考えるときには，relation の groupoid としての性質を調べることが重要になる．

はじめに戻って，離散群 Γ が (X,μ) 上保測かつ本質的自由に作用しているとし，$\mathcal{R}$ を上のように与える．このとき，

$$\rho\colon \mathcal{R} \to \Gamma, \quad (gx, x) \mapsto g$$

は cocycle を定める．つまり，$\mathcal{R}$ と Γ を groupoid と見なしたとき，ρ は準同型である．

いま, Γ が Borel 空間 K に作用しているとする. もし, この K が何らかの良い性質 (例えば, コンパクト性) を持っていれば, K の点 k とその stabilizer

$$\{\gamma \in \Gamma : gk = k\}$$

の関係を調べることにより Γ の性質を理解できることがある. 同様なことが relation についても言える. 今回の仕事ではこの精神を常に押し進めている. (このような考え方を導入し成功したのは, おそらく Zimmer [15] が最初であろう.) まず, $\mathcal{R}$ の K 上の作用と, $\mathcal{R}$ の subrelation $\mathcal{S}$ (つまり, subgroupoid) の作用に関する不動点に対応するものを導入する.

$\mathcal{R}$ の K 上の作用 (つまり, $\mathcal{R}$ から K の自己同型群への準同型) を, ρ と Γ の K 上の作用を合成したもので定義する. $\mathcal{R}$ の subrelation $\mathcal{S}$ に対し, Borel 写像

$$\varphi \colon X \to K$$

が, $\rho(x,y)\varphi(y) = \varphi(x)$ をほとんどすべての $(x,y) \in \mathcal{S}$ について満たすとき, φ は $\mathcal{S}$-不変であるという. この $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像が $\mathcal{S}$ の作用の不動点と呼べるものである. (実際にはもっと一般に, relation もしくは groupoid の作用やその不動点が定義される. 詳しくは [3] を参照せよ.)

例えば, 例 5 で見たように, 群の amenability はその Banach 空間上の作用とその作用の不動点の性質で記述できる. 同じようにして Zimmer は equivalence relation の amenability を上で記した relation の作用と不動点の言葉を用いて定義し, 次の定理を証明した:

定理 15 ([15, Proposition 4.3.3]). 離散群 Γ が確率測度付きの標準 Borel 空間上に本質的自由かつ保測に作用しているとき, それから生成される relation の amenability と Γ の amenability は同値である.

このようにして, 群の性質の類似を relation の場合でも考えることで, 群のレベルで得られる性質を relation のレベルでも示していこうというのが, 主結果を示す際の基本姿勢となる. 写像類群は多くの幾何学的な対象 (例えば, Thurston 境界や curve complex) 上の自然な作用を持つので, これらを用いて色々な性質を調べていくわけである.

5 最後に

もう少し先に進んだ証明の概要を [11] に記しましたので, 興味を持たれた方はそちらも目を通して頂ければ幸いです. ただし, [11] は作用素環の専門家向けに書いたものです.

参考文献

[1] S. Adams. Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups. *Topology* **33** (1994), 765–783.

[2] S. Adams. Indecomposability of equivalence relations generated by word hyperbolic groups. *Topology* **33** (1994), 785–798.

[3] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids.* Monogr. Enseign. Math., 36. Enseignement Math., Geneva, 2000.

[4] A. Furman. Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.

[5] A. Furman. Orbit equivalence rigidity. *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1083–1108.

[6] D. Gaboriau. On orbit equivalence of measure preserving actions. In *Rigidity in dynamics and geometry* (Cambridge, 2000), 167–186, Springer, Berlin, 2002.

[7] D. Gaboriau. Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* No. **95** (2002), 93–150.

[8] M. Gromov. Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory. *J. Differential Geom.* **33** (1991), 263–292.

[9] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[10] Y. Kida. The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory. Preprint 2005. math.GR/0512230

[11] Y. Kida. Equivalence relations generated by the mapping class groups. 数理解析研究所講究録 作用素環論の展開, 2005 年 9 月.

[12] H. A. Masur and Y. N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.* **138** (1999), 103–149.

[13] C. T. McMullen. The moduli space of Riemann surfaces is Kähler hyperbolic. *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), 327–357.

[14] D. S. Ornstein and B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), 161–164.

[15] R. J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups.* Monographs in Mathematics, 81. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.